1. lokakuuta 2015

Laskinohje — LUONNOS

Matematiikan kokeen B-osassa kaikki funktio-, graafiset- ja symboliset laskimet ovat sallittuja apuvälineitä. Laskimen käyttö on kokelaan vastuulla. Laskimen oikeanlainen käyttö edellyttää kokelaalta riittävää kypsyyttä matemaattisen tekstin lukijana ja kirjoittajana.

Matematiikan tehtävän vastaus koostuu väitteistä ja niiden perusteluista. Se, mikä väite vaatii perustelun riippuu asiayhteydestä. Esimerkiksi alakoulussa väite $25+86=111$ vaatisi useimmiten auki kirjoitetu laskun perustelukseen, mutta lukiossa tämä tulos on niin selvä, ettei erillisiä perusteluita yleensä annettaisi. **Laskinta saa käyttää minkä tahansa väitteen aikaansaamisessa, mutta laskin ei muodosta koskaan väittämän perustelua.** Jos tehtävässä pyydetään *osoittamaan*, *todistamaan* tai *perustelemaan* jotain, ei laskimen antama tulos ole koskaan yksinään riittävä. Laskimen antama tulos voi kuitenkin muodostaa perustelun osan:

> **Esimerkki**. Osoita, että funktio $f(x) = x^3 + 3$ on kasvava.
>
> HYVÄ RATKAISU. Derivoituva funktio on kasvava jos sen derivaatta on ei-negatiivinen *(Perustelu)*. Funktion derivaatta on $f'(x) = 3x^2$ *(Lasku)*. Koska $x^2 \geq 0$ aina, on derivaatta ei-negatiivinen, ja siten funktio f on kasvava *(Perustelu)*.

Lisäksi on huomattava, että ratkaisusta on aina käytävä ilmi mitä on laskettu:

> **Esimerkki**. Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ derivaatan nollakohdat.
>
> HYVÄ RATKAISU. Koska $f'(x) = x^2 + x - 2$, niin saamme toisen asteen yhtälön $x^2 + x - 2 = 0$, jonka ratkaisut, ja samalla derivaatan nollakohdat, ovat 1 ja -2.
>
> PUUTTEELLINEN RATKAISU. Koska $f'(x) = x^2 + x - 2$, niin $x = 1$ tai $x = -2$. *(Ratkaisussa ei kerrota miten lausekkeesta $x^2 + x - 2$ saadaan $x = 1$ tai $x = -2$, eli yhtälön muodostaminen on jätetty lukijan arvattavaksi.)*

Tulkintaohjeessa on annettu monta esimerkkiä, mitä tämä eri tilanteissa tarkoittaa.

Laskinohjeen tulkinta — LUONNOS

Lausekkeen muokkaaminen. Lausekkeen muokkaaminen laskimella on sallittua.

Yhtälön ratkaisu. Laskimella saa ratkaista yhtälöitä kun laskin antaa vastauksena tarkan arvon. Laskimen antama likiarvo ei ole ratkaisu vaan ratkaisun arvio. Koska laskin ei osaa ratkaista kaikkia yhtälöitä, eikä aina löydä yhtälön kaikkia ratkaisuja, ei laskimella voi vastata seuraaviin kysymyksiin: yhtälöllä ei ole ratkaisuja; yhtälön ratkaisujen lukumäärää, yhtälön kaikki ratkaisut. Yhtälön numeerinen ratkaiseminen kelpaa vain laskennallisissa tehtävissä.

> **Esimerkki.** Osoita, että yhtälöllä $\sin(x) = -2x + 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu.
>
> Hyvä ratkaisu. Olkoon $f(x) = \sin(x) + 2x - 1$. Tällöin $f'(x) = \cos(x) + 2$, joten $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Funktio f on siis aidosti kasvava, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta. Koska $f(0) = -1$ ja $f(1) = \sin(1) + 1 > 0$, niin Bolzanon lauseen nojalla funktiolla on vähintään yksi nollakohta välillä $[0, 1]$. Näistä seuraa, että yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu.
>
> Puutteellinen ratkaisu. Laskimesta saatu yhtälön $\sin(x) = -x + 1$ ratkaisu on 0,33541803.... Laskin ei antanut muita ratkaisuja. *(Numeerista ratkaisemista on sovellettu olemassaolon osoittamiseen.)*

> **Esimerkki.** Etsi yhtälön $z^3 + 2z^2 + z = 0$ kaikki ratkaisut.
>
> Hyvä ratkaisu. Laskimen mukaan $z = -1$, $z = 0$ tai $z = 1$ ovat ratkaisuja. Koska kyseessä on kolmannen asteen yhtälö, voi ratkaisuja olla korkeintaan kolme, joten nämä ovat kaikki ratkaisut.
>
> Puutteellinen ratkaisu. Laskimen mukaan $z = -1$, $z = 0$ tai $z = 1$.

Epäyhtälön ratkaisu. Epäyhtälöitä voi ratkaista laskimella samojen periaatteiden mukaisesti kuin yhtälöitäkin.

Yhtälöryhmien ratkaiseminen. Yhtälöryhmiä saa ratkaista laskimella samojen periaatteiden mukaisesti kuin yhtälöitäkin. Yhtälöryhmien ratkaiseminen graafisesti on hyväksyttävää vain jos ratkaisun tarkka arvo on kiistatta pääteltävissä vastauspaperiin piirretystä kuviosta; esimerkiksi suorien $y = 2x$ ja $y = 2$ leikkauspiste on tälläinen.

Funktion määrittelyjoukko ja arvojoukko. Funktion määrittelyjoukkoa ja arvojoukkoa ei saa ratkaista pelkästään laskimella, koska kyseiset käsitteet eivät lukiotasolla ole niin selviä, etteikö niihin liittyisi perustelujen tarvetta.

Raja-arvon laskeminen. Laskimella ei voi perustella raja-arvon arvoa. Laskinta voi käyttää raja-arvon määrittämiseen niissä tilanteissa, missä mitään perustelua ei vaadita.

Esimerkki. Osoita, että $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$.

HYVÄ RATKAISU. Saamme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+0} = \infty.$$

(*Huomaa, että toisessa yhtälössä on laskettu raja-arvo* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. *Tämä on sellainen perustieto, jonka voi joko osata ulkoa tai saada laskimesta.*)

PUUTTEELLINEN RATKAISU. Laskimella saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty.$$

(*Perustelu puuttuu.*)

DERIVAATAN LASKEMINEN. Funktion derivaattafunktion voi laskea laskimella. Se, ettei laskin osaa laskea derivaattaa, ei kuitenkaan vielä osoita, etteikö derivaattaa olisi olemassa. Kuitenkin, jos tehtävänä on *osoittaa* derivaatan olemassa olo, ei laskimen käyttö yksin riitä ratkaisuksi.

Esimerkki. Olkoon $f(x) = |x|$. Osoita, että f ei ole derivoituva origossa.

HYVÄ RATKAISU. Erotusosamäärälle saamme

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Kun $x > 0$, niin

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Kun $x < 0$, niin

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

Koska erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa origossa, niin funktio f ei ole derivoituva origossa.

PUUTTEELLINEN RATKAISU. Koska $f'(x) = \frac{x}{|x|}$ ja $\frac{0}{|0|}$ ei ole määritelty, niin f ei ole derivoituva origossa.

INTEGRAALIN LASKEMINEN. Integraalin voi laskea laskimella, mutta integraalifunktio on merkittävä näkyviin.

EPÄOLEELLISEN INTEGRAALIN LASKEMINEN. Epäoleellinen integraali on (Riemannin) integraalin ja raja-arvon yhdistelmä. Tämän tulee käydä ilmi ratkaisusta.

Esimerkki. Laske $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Hyvä ratkaisu. Saamme

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \Big/_a^1 2\sqrt{x} = \lim_{a\to 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$

Puutteellinen ratkaisu. (Laskimesta)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

Funktion lokaalit ja globaalit ääriarvot. Funktion ääriarvojen määrittämisessä pelkkä tulos, joka on saatu esimerkiksi laskimen ”min”, ”max” tai vastaavalla komennolla, ei riitä vastaukseksi.

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x - 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 2]$.

Hyvä ratkaisu. Suljetulla välillä määritelty jatkuva ja derivoituva funktio saavuttaa ääriarvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Derivoimalla saamme

$$f'(x) = 3x^2 - 6.$$

Nyt $f'(x) = 0$ tarkalleen silloin, kun $x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$. Lasketaan

$$f(-2) = 3, \quad f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 1 \approx 4{,}65685\ldots,$$
$$f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} - 1 \approx -6{,}65685\ldots, \quad f(2) = -5$$

joten suurin arvo on $4\sqrt{2} - 1$ ja pienin $-4\sqrt{2} - 1$.

Puutteellinen ratkaisu. Pienin arvo saavutetaan kohdassa $\sqrt{2}$, jossa $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} - 1$ ja suurin arvo kohdassa $-\sqrt{2}$, jossa $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 1$. *(Ratkaisua ei ole perusteltu.)*

Todennäköisyysjakautumat. Todennäköisyysjakautuman kertymäfunktion ja sen käänteisfunktion arvon saa laskea laskimella.

Analyyttinen geometria. Laskinta saa käyttää apuna kun muodostetaan esimerkiksi suorien tai ympyröiden yhtälöitä. Käyrien leikkauspisteet lasketaan yhtälöryhmällä edellä kerrottujen periaatteiden mukaisesti.

Yhtälöryhmien ratkaiseminen graafisesti on hyväksyttävää vain jos ratkaisun tarkka arvo on kiistatta pääteltävissä *vastauspaperiin piirretystä* kuviosta. Laskimen näytöltä katsottua leikkauspisteen tarkkaa arvoa tai likiarvoa ei riitä perusteluksi, koska peruste ei ole vastauksen lukija havaittavissa.